Teorema della traccia in B_r

1. Diseguaglianza della traccia in B_r

Lemma 1. *Sia $\varphi \in C(\overline{B}_1) \cap C^1(B_1)$ una funzione definita su $\overline{B}_1$ in $\mathbb{R}^d$. Allora,*

$$\int_{\partial B_1} \varphi \, d\mathcal{H}^{d-1} \le d \left(\int_{B_1} \varphi \, dx + \int_{B_1} |\nabla \varphi| \, dx \right).$$

Proof. Sia $\theta \in \partial B_1$. Allora, per ogni $r \in (0,1)$, abbiamo

$$\varphi(\theta) - \varphi(r\theta) = \int_r^1 \theta \cdot \nabla \varphi(\theta t) \, dt$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 r^{d-1} \varphi(\theta) \, dr - \int_0^1 r^{d-1} \varphi(r\theta) \, dr \right| &\le \int_0^1 r^{d-1} |\varphi(\theta) - \varphi(r\theta)| \, dr \\
&\le \int_0^1 r^{d-1} \int_r^1 |\theta \cdot \nabla \varphi(\theta t)| \, dt \, dr \\
&\le \int_0^1 \int_r^1 t^{d-1} |\nabla \varphi|(\theta t) \, dt \, dr \\
&\le \int_0^1 \int_0^1 t^{d-1} |\nabla \varphi|(\theta t) \, dt \, dr \\
&= \int_0^1 t^{d-1} |\nabla \varphi|(\theta t) \, dt.
\end{aligned}$$

Integrando in θ su ∂B_1, otteniamo

$$\frac{1}{d} \int_{\partial B_1} \varphi \, d\mathcal{H}^{d-1} \le \int_{B_1} \varphi \, dx + \int_{B_1} |\nabla \varphi| \, dx. \quad \square$$

Lemma 2. *Sia $\varphi \in C(\overline{B}_1) \cap C^1(B_1)$ una funzione definita su $\overline{B}_1$ in $\mathbb{R}^d$. Allora,*

$$\int_{\partial B_1} \varphi^2 \, d\mathcal{H}^{d-1} \le 2d \int_{B_1} \varphi^2 \, dx + d \int_{B_1} |\nabla \varphi|^2 \, dx.$$

Proposizione 3. *Sia $\varphi \in C(\overline{B}_r) \cap C^1(B_r)$ una funzione definita su $\overline{B}_r$ in $\mathbb{R}^d$. Allora,*

$$\int_{\partial B_r} \varphi^2 \, d\mathcal{H}^{d-1} \le \frac{2d}{r} \int_{B_r} \varphi^2 \, dx + rd \int_{B_r} |\nabla \varphi|^2 \, dx.$$

2. Definizione della traccia e disuguaglianza della traccia per funzioni di Sobolev

Lemma 4. *Per ogni $u \in H^1(B_r)$ esiste una successione di funzioni φ_n tale che:*
- *per ogni $n \ge 1$, φ_n è definita su B_{R_n}, per un qualche $R_n > r$ ed è in $C^\infty(B_{R_n})$.*
- *la successione φ_n converge a u forte in $H^1(B_r)$:*

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi_n - u\|_{H^1(B_r)} = 0.$$

Proof. Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo il riscalamento

$$u_\varepsilon(x) := u\left(\frac{x}{1+\varepsilon} \right).$$

Allora $u_\varepsilon \in H^1(B_{(1+\varepsilon)r})$ e si ha

$$\int_{B_{r(1+\varepsilon)}} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, dx = (1+\varepsilon)^{d-2} \int_{B_r} |\nabla u|^2 \, dx \qquad \text{e} \qquad \int_{B_{r(1+\varepsilon)}} u_\varepsilon^2 \, dx = (1+\varepsilon)^d \int_{B_r} u^2 \, dx.$$

Quindi la famiglia u_ε è limitata in $H^1(B_r)$. Usando una funzione test $\varphi \in C_c^\infty(B_r)$, abbiamo che

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_r}\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla\varphi\,dx=\int_{B_r}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx\qquad\text{e}\qquad\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_r}u_\varepsilon\varphi\,dx=\int_{B_r}u\varphi\,dx,$$

ovvero u_ε converge a u debole-$H^1(B_r)$. D'altra parte

$$\int_{B_r}|\nabla u_\varepsilon|^2\,dx=(1+\varepsilon)^{d-2}\int_{B_{r/(1+\varepsilon)}}|\nabla u|^2\,dx\qquad\text{e}\qquad\int_{B_r}u_\varepsilon^2\,dx=(1+\varepsilon)^d\int_{B_{r/(1+\varepsilon)}}u^2\,dx,$$

il che implica che u_ε converge a u forte-$H^1(B_r)$.

Ora, fissato $\varepsilon > 0$, consideriamo la funzione $u_\varepsilon \in H^1(B_{r(1+\varepsilon)})$. Siccome $B_r \Subset B_{r(1+\varepsilon)}$, per il teorema di approssimazione in domini aperti, esiste una successione di funzioni $\varphi_{\varepsilon,n}$ che è C^∞ in $B_{r(1+\varepsilon/2)}$ e che converge forte-$H^1(B_r)$ a u_ε. La tesi segue estraendo una successione diagonale. □

Lemma 5. *Sia $u \in H^1(B_r)$ e sia $\varphi_n : \overline{B}_r \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni in*

$$H^1(B_r)\cap C^1(B_r)\cap C(\overline{B}_r)$$

che converge forte-$H^1(B_r)$ a u. Allora, la successione di tracce

$$\varphi_n : \partial B_r \to \mathbb{R}$$

è una successione di Cauchy in $L^2(\partial B_r)$. Inoltre, se

$$\varphi_n \in H^1(B_r)\cap C^1(B_r)\cap C(\overline{B}_r)\qquad e\qquad \psi_n \in H^1(B_r)\cap C^1(B_r)\cap C(\overline{B}_r)$$

sono due successioni che convergono forte-$H^1(B_r)$ a u, allora

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n-\psi_n\|_{L^2(\partial B_r)}=0,$$

ovvero il limite delle successioni $\varphi_n : \partial B_r \to \mathbb{R}$ e $\psi_n : \partial B_r \to \mathbb{R}$ in $L^2(\partial B_r)$ è lo stesso.

Definizione 6. *Data una funzione $u \in H^1(B_r)$, definiamo la traccia di u su ∂B_r come l'unica funzione*

$$v \in L^2(\partial B_r)$$

ottenuta come limite in $L^2(\partial B_r)$ di una (qualsiasi) successione di funzioni

$$\varphi_n \in H^1(B_r)\cap C^1(B_r)\cap C(\overline{B}_r)$$

che converge forte-$H^1(B_r)$ alla funzione u.

Per indicare la traccia di $u \in H^1(B_r)$ su ∂B_r useremo ancora la stessa lettera u.

Teorema 7. *Siano B_r la palla di raggio r in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_r)$. Allora*

$$\int_{\partial B_r}u^2\,d\mathcal{H}^{d-1}\le\frac{2d}{r}\int_{B_r}u^2\,dx+rd\int_{B_r}|\nabla u|^2\,dx\ .$$

Osservazione 8. *L'operatore che associa ad ogni funzione $u \in H^1(B_r)$ la sua traccia $u \in L^2(\partial B_r)$ è un operatore lineare e limitato.*

Osservazione 9. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(\Omega)$. Se $B_r(x_0) \subset \Omega$, allora*

$$u\in L^2(\partial B_r(x_0))\qquad e\qquad \int_{\partial B_r}u^2\,d\mathcal{H}^{d-1}\le\frac{2d}{r}\int_{B_r}u^2\,dx+rd\int_{B_r}|\nabla u|^2\,dx\ .$$

Di conseguenza, l'integrale

$$\int_{\partial B_r(x_0)}u\,d\mathcal{H}^{d-1}$$

è definito per ogni r tale che $\overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$.

3. Integrazione in coordiante polari

Proposizione 10. *Sia Ω un insieme aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(\Omega)$. Allora, per ogni punto $x_0 \in \Omega$ e per ogni coppia di raggi*

$$0 \le r < R$$

tale che

$$B_R(x_0) \subset \Omega,$$

si ha

$$\int_r^R \left(\int_{\partial B_s(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{d-1} \right) ds = \int_{B_R(x_0) \setminus B_r(x_0)} u(x) \, dx.$$

In particolare, quando $r = 0$, si ha

$$\int_0^R \left(\int_{\partial B_s(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{d-1} \right) ds = \int_{B_R(x_0)} u(x) \, dx.$$

4. Sulla continuità della media

Proposizione 11. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(\Omega)$. Sia $B_\rho(x_0) \subset \Omega$. Allora, la funzione*

$$M(r) = \frac{1}{r^{d-1}} \int_{\partial B_r(x_0)} u$$

è $1/2$-Hölder continua nell'intervallo aperto $(0, \rho)$.

Proof. Supponiamo che $x_0 = 0$. Siano $\theta \in \partial B_1$ e $0 < r < R < \rho$. Allora,

$$\left| \frac{1}{R^{d-1}} \int_{\partial B_R} \varphi - \frac{1}{r^{d-1}} \int_{\partial B_r} \varphi \right| = \left| \int_{\partial B_1} \varphi(R\theta) \, d\theta - \int_{\partial B_1} \varphi(r\theta) \, d\theta \right| \le \int_{\partial B_1} \big| \varphi(R\theta) - \varphi(r\theta) \big| \, d\theta$$

Ora, osserviamo che

$$\varphi(R\theta) - \varphi(r\theta) = \int_r^R \theta \cdot \nabla \varphi(\theta t) \, dt$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{R^{d-1}} \int_{\partial B_R} \varphi - \frac{1}{r^{d-1}} \int_{\partial B_r} \varphi \right| &\le \int_{\partial B_1} \int_r^R |\nabla \varphi|(\theta t) \, dt \, d\theta \\
&\le C_d (R - r)^{1/2} \left(\int_{\partial B_1} \int_r^R |\nabla \varphi|^2(\theta t) \, dt \, d\theta \right)^{1/2} \\
&\le C_d r^{-\frac{d-1}{2}} (R - r)^{1/2} \left(\int_{\partial B_1} \int_r^R t^{d-1} |\nabla \varphi|^2(\theta t) \, dt \, d\theta \right)^{1/2} \\
&= C_d r^{-\frac{d-1}{2}} (R - r)^{1/2} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

5. Gli spazi H_0^1 ed il teorema della traccia

Teorema 12. *Siano B_r la palla di raggio $r > 0$ in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_r)$. Allora, sono equivalenti:*

(i) *$u \in H_0^1(B_r)$;*
(ii) *la traccia di u su ∂B_r è nulla.*

Proof. L'implicazione (i) $\Rightarrow$ (ii) segue direttamente dalla definizione. Infatti, basta osservare che per definizione di $H_0^1(B_r)$ esiste una successione $\varphi_n \in C_c^\infty(B_r)$ che converge a u forte in H^1. Siccome la traccia di u è il limite delle tracce di φ_n e $\varphi_n = 0$ su ∂B_r, abbiamo che anche la traccia di u è zero su ∂B_r.

Dimostriamo ora che (ii) $\Rightarrow$ (i). Consideriamo una famiglia di funzioni $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(B_r)$ tale che

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{se} \quad x \in B_{r-\varepsilon}, \\ 0 \le \varphi_\varepsilon(x) \le 1 \quad \text{e} \quad |\nabla \varphi_\varepsilon|(x) \le \dfrac{2}{\varepsilon} \quad \text{per} \quad x \in B_r \setminus B_{r-\varepsilon}. \end{cases}$$

Allora, $u\varphi_\varepsilon \to u$ in $L^2(B_r)$ e si ha che

$$\begin{aligned}\int_{B_r} |\nabla(u-u\varphi_\varepsilon)|^2\,dx &\le 2\int_{B_r\setminus B_{r-\varepsilon}} \varphi_\varepsilon^2|\nabla u|^2\,dx + 2\int_{B_r\setminus B_{r-\varepsilon}} u^2|\nabla\varphi_\varepsilon|^2\,dx\\ &\le 2\int_{B_r\setminus B_{r-\varepsilon}} |\nabla u|^2\,dx + \frac{8}{\varepsilon^2}\int_{B_r\setminus B_{r-\varepsilon}} u^2\,dx\\ &\le 2\int_{B_r\setminus B_{r-\varepsilon}} |\nabla u|^2\,dx + \frac{8}{\varepsilon^2}\int_{r-\varepsilon}^r \left(\int_{\partial B_s} u^2\right)ds\end{aligned}$$

Ora, per ogni $\theta \in \partial B_1$ ed ogni $0 < s < r$ abbiamo

$$|u(r\theta) - u(s\theta)| \le \int_s^r |\nabla u|(t\theta)\,dt.$$

Di conseguenza, abbiamo

$$|u|(s\theta) \le |u|(r\theta) + \int_s^r |\nabla u|(t\theta)\,dt,$$

ed anche

$$u^2(s\theta) \le 2u^2(r\theta) + 2\left(\int_s^r |\nabla u|(t\theta)\,dt\right)^2 \le 2u^2(r\theta) + 2(r-s)\int_s^r |\nabla u|^2(t\theta)\,dt\,.$$

Integrating in θ, we get

$$\frac{1}{s^{d-1}}\int_{\partial B_s} u^2\,d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial B_1} u^2(s\theta)\,d\theta \le \int_{\partial B_1} 2(r-s)\int_s^r |\nabla u|^2(t\theta)\,dt\,d\theta \le \frac{2(r-s)}{s^{d-1}}\int_{B_r\setminus B_s} |\nabla u|^2\,dx.$$

Di conseguenza,

$$\frac{8}{\varepsilon^2}\int_{r-\varepsilon}^r \left(\int_{\partial B_s} u^2\right)ds \le \frac{8}{\varepsilon^2}\int_{r-\varepsilon}^r 2(r-s)ds\int_{B_r\setminus B_{r-\varepsilon}} |\nabla u|^2\,dx = 8\int_{B_r\setminus B_{r-\varepsilon}} |\nabla u|^2\,dx.$$

Questo conclude la dimostrazione. $\square$